Πότε μία συνάρτηση 1-1 σε ένα διάστημα *Δ* είναι και γνησίως μονότονη στο *Δ*;

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου στην 1.3 παράγραφο του Β΄ Μέρους αναφέρεται ότι ισχύει η πρόταση:

Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση "1-1" (1)

και στη συνέχεια με ένα αντιπαράδειγμα αποδεικνύεται ότι μία συνάρτηση 1-1 δεν είναι κατ' ανάγκη γνησίως μονότονη, δηλαδή ότι δεν ισχύει η αντίστροφη πρόταση της (1).
Εύλογα λοιπόν γεννιέται το ερώτημα:

Πότε μία συνάρτηση 1-1 *σε ένα διάστημα Δ είναι και γνησίως μονότονη στο Δ*;

(Το ερώτημα διατυπώνεται για διάστημα, επειδή η μονοτονία μιας συνάρτησης, όπως τονίζεται και στο σχολικό βιβλίο, αναφέρεται σε διάστημα[1] σε αντίθεση με την ιδιότητα "1-1".)
Στην προσπάθειά μας να απαντήσουμε στο παραπάνω ερώτημα, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση του αντιπαραδείγματος του σχολικού βιβλίου, που είναι η

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο 0. Έτσι λοιπόν δημιουργείται ο προβληματισμός:

Μήπως μία συνάρτηση 1-1 *και συνεχής σε ένα διάστημα Δ είναι και γνησίως μονότονη στο Δ;*

Εξετάζοντας πειραματικά διάφορες περιπτώσεις φαίνεται ότι ο παραπάνω προβληματισμός ισχύει, οπότε μπορεί να θεωρηθεί ως εικασία. Για να αποδείξουμε τώρα την εικασία αυτή χρειαζόμαστε το παρακάτω λήμμα:

<u>Λήμμα</u>: Μία συνάρτηση *f* είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα *Δ* του πεδίου ορισμού της εάν και μόνον εάν για κάθε *α*, *β*, *γ* ∈ *Δ* με *α* < *β* < *γ* ισχύει η ανισότητα:

$$\big(f(\alpha)-f(\beta)\big)\cdot\big(f(\beta)-f(\gamma)\big)>0\,.$$

<u>Απόδειξη:</u> ($\Rightarrow$) Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ οι διαφορές $f(\alpha)-f(\beta)$ και $f(\beta)-f(\gamma)$ για οποιαδήποτε $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$ με $\alpha<\beta<\gamma$ είναι ομόσημοι αριθμοί, οπότε το γινόμενό τους είναι θετικός αριθμός.

[1] Μπορεί μία συνάρτηση να είναι γνησίως μονότονη σε δύο ξένα διαστήματα του πεδίου ορισμού της με το ίδιο είδος μονοτονίας σ' αυτά, ενώ στην ένωσή τους να μην είναι γνησίως μονότονη.

($\Leftarrow$) Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε ζεύγη (x_1, x_2) & (x_3, x_4) του Δ^2 με $x_1 < x_2$ και $x_3 < x_4$ οι αριθμοί $f(x_1) - f(x_2)$ και $f(x_3) - f(x_4)$ είναι ομόσημοι.

Από την ανισότητα $\big(f(\alpha) - f(\beta)\big)\cdot\big(f(\beta) - f(\gamma)\big) > 0$ συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ με $\alpha < \beta < \gamma$ οι αριθμοί $f(\alpha) - f(\beta)$ και $f(\beta) - f(\gamma)$ είναι ομόσημοι, οπότε και το άθροισμά τους

$$f(\alpha) - f(\beta) \ + \ f(\beta) - f(\gamma) \ = \ f(\alpha) - f(\gamma)$$

θα έχει το ίδιο πρόσημο με τους αριθμούς αυτούς.

Στη συνέχεια με την βοήθεια των παραπάνω συμπερασμάτων αποδεικνύουμε ότι για οποιαδήποτε ζεύγη (x_1, x_2) & (x_3, x_4) του Δ^2 με $x_1 < x_2$ και $x_3 < x_4$ οι αριθμοί $f(x_1) - f(x_2)$ και $f(x_3) - f(x_4)$ είναι ομόσημοι διακρίνοντας περιπτώσεις για την σχετική θέση των x_1, x_2 και x_3, x_4 στο διάστημα Δ. Πράγματι,

- Αν είναι

$$x_1 < x_3 < x_2 < x_4$$

τότε οι αριθμοί:

$$f(x_1) - f(x_3), \quad f(x_3) - f(x_2), \quad f(x_2) - f(x_4) \quad \text{και οι} \quad f(x_1) - f(x_2) \quad \text{και} \quad f(x_3) - f(x_4)$$

είναι ομόσημοι.

- Αν είναι

$$x_1 < x_3 < x_4 < x_2$$

τότε οι αριθμοί:

$$f(x_1) - f(x_3), \quad f(x_3) - f(x_4), \quad f(x_4) - f(x_2) \quad \text{και} \quad f(x_1) - f(x_2)$$

είναι ομόσημοι.

Με ανάλογο τρόπο εργαζόμαστε και στις άλλες περιπτώσεις.

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο Δ. □

Θεωρούμε τώρα μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ, η οποία είναι 1-1 και συνεχής. Αν η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο Δ, τότε σύμφωνα με το παραπάνω λήμμα υπάρχουν τρεις αριθμοί α, β, γ του Δ με $\alpha < \beta < \gamma$ για τους οποίους ισχύει $\big(f(\alpha) - f(\beta)\big)\cdot\big(f(\beta) - f(\gamma)\big) \le 0$.

Επειδή η f είναι 1-1 το "=" αποκλείεται και έτσι οι παράγοντες του παραπάνω γινομένου θα είναι ετερόσημοι αριθμοί, δηλαδή θα ισχύει:

$$\big(f(\alpha) - f(\beta) > 0 \ \ \& \ \ f(\beta) - f(\gamma) < 0\big) \ \ \textbf{ή} \ \ \big(f(\alpha) - f(\beta) < 0 \ \ \& \ \ f(\beta) - f(\gamma) > 0\big)$$

$$\Leftrightarrow \quad \big(f(\alpha) > f(\beta) \ \ \& \ \ f(\beta) < f(\gamma)\big) \ \ \textbf{ή} \ \ \big(f(\alpha) < f(\beta) \ \ \& \ \ f(\beta) > f(\gamma)\big)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(\beta) < f(\alpha) \\ f(\beta) < f(\gamma) \end{cases} \quad \textbf{ή} \quad \begin{cases} f(\alpha) < f(\beta) \\ f(\gamma) < f(\beta) \end{cases}.$$

Επειδή η f είναι συνεχής, σύμφωνα με το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών** για κάθε αριθμό $\boldsymbol{\eta}$ με:

$$f(\beta) < \eta < \min\big(f(\alpha), f(\gamma)\big) \qquad \textbf{ή} \qquad \max\big(f(\alpha), f(\gamma)\big) < \eta < f(\beta)$$

υπάρχουν αριθμοί $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ και $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$, ώστε $f(\xi_1) = f(\xi_2) = \eta$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού η f είναι 1-1. Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι ισχύει η παρακάτω πρόταση, η οποία απαντά στο ερώτημα.

<u>Πρόταση:</u> Αν μία συνάρτηση *f* είναι 1-1 και συνεχής σε ένα διάστημα *Δ*, τότε είναι και γνησίως μονότονη στο *Δ*.