Η έννοια της πιθανότητας - γιατί ο αξιωματικός ορισμός

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Για πολλούς αιώνες οι μαθηματικοί προσπαθούσαν να ορίσουν την έννοια της πιθανότητας. Στο διάστημα αυτό προτάθηκαν διάφοροι ορισμοί, οι οποίοι όμως είχαν ορισμένα αδύνατα σημεία και γι' αυτό δεν μπορούσε να στηριχτεί σ' αυτούς τους ορισμούς η θεμελίωση της **Θεωρίας Πιθανοτήτων**. Οι ορισμοί αυτοί είναι:

- ο **κλασικός** ορισμός της πιθανότητας
- ο **στατιστικός** ορισμός της πιθανότητας
- ο ορισμός της **υποκειμενικής** πιθανότητας και
- ο ορισμός της **γεωμετρικής** πιθανότητας.

Θα αναφερθούμε στα αδύνατα σημεία μόνο των δύο πρώτων ορισμών, επειδή αυτοί περιέχονται σε σχολικά βιβλία.

Α΄ Κλασικός Ορισμός της Πιθανότητας

Βασικό πρόβλημα του **κλασικού** ορισμού της πιθανότητας, ο οποίος διατυπώθηκε από τον Laplace το 1812, είναι η περιορισμένη εφαρμογή του, αφού αναφέρεται σε πεπερασμένους δειγματικούς χώρους και επιπλέον προϋποθέτει τα απλά ή στοιχειώδη ενδεχόμενα να είναι ισοπίθανα.

Επίσης, εκείνο που αξίζει να σημειωθεί ακόμα σχετικά με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας είναι πως όταν στην διατύπωση του ορισμού αυτού αναφέρεται ότι τα απλά ενδεχόμενα πρέπει να είναι ισοπίθανα[1], δημιουργείται φαύλος κύκλος, επειδή ο όρος «ισοπίθανα» περιέχει την έννοια της πιθανότητας, η οποία δεν ορίζεται πριν την διατύπωση του κλασικού ορισμού αλλά εισάγεται με αυτόν τον ορισμό.

Β΄ Στατιστικός Ορισμός της Πιθανότητας

Ο **στατιστικός** ορισμός της έννοιας της πιθανότητας, ο οποίος δόθηκε από τον Von Mises στη δεκαετία του 1920, στηρίζεται στη σχετική συχνότητα και εισάγει με πολύ ωραίο τρόπο την έννοια της πιθανότητας. Όμως και αυτός ο ο-

[1] Μερικοί χρησιμοποιούν συνώνυμους όρους, όπως π.χ. «ίδια δυνατότητα» κλπ., οι οποίοι όμως δεν ορίζονται, οπότε πάλι υπάρχει πρόβλημα.

ρισμός έχει αδύνατο σημείο που τον εμποδίζει να καθιερωθεί ως ο μαθηματικός ορισμός της έννοιας της πιθανότητας και να στηριχτεί σ' αυτόν η θεμελίωση της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Το αδύνατο σημείο του ορισμού αυτού είναι ότι η σχετική συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου δεν δίνεται θεωρητικά με κάποιον τύπο ακολουθίας, αλλά προκύπτει **εμπειρικά** με επανάληψη του πειράματος τύχης κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Εκτός αυτού, η σύγκλιση αποδεικνύεται με τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών που έχει πιθανοθεωρητική βάση.

Γ΄ Αξιωματικός Ορισμός της Πιθανότητας

Τελικά, η έννοια της πιθανότητας φαίνεται πως είναι πρωταρχική, οπότε δεχόμαστε αξιωματικά σύμφωνα με την διαίσθηση και την εμπειρία μας τις ιδιότητες που την χαρακτηρίζουν. Στο πνεύμα αυτό κινήθηκε ο Kolmogorov και διατύπωσε το 1933 τον **αξιωματικό** ορισμό της έννοιας της πιθανότητας με πρότυπο την **Θεωρία Μέτρου**. Σήμερα η θεμελίωση της Θεωρίας Πιθανοτήτων στηρίζεται στον αξιωματικό ορισμό του Kolmogorov, που είναι ο εξής:

Ορισμός: Έστω ένα μη κενό σύνολο Ω και F μία σ-άλγεβρα[2] του Ω**.** Πιθανότητα ονομάζεται κάθε συνάρτηση $P : F \to IR$ για την οποία ισχύουν:

1. $P(A) \geq 0, \forall A \in F$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),\ \forall\ \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq F$ με $A_i \cap A_j = \varnothing,\ \forall\ i, j = 1,\ 2,\ ...\ \&\ i \neq j.$

Η τριάδα (Ω, F, P) ονομάζεται **χώρος πιθανότητας** (probability space).

Παρατηρούμε ότι στον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας του Kolmogorov δεχόμαστε ότι τα υποσύνολα του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης στα οποία μπορεί να αποδοθεί πιθανότητα (παρατηρήσιμα ενδεχόμενα) αποτελούν μία σ-άλγεβρα του χώρου αυτού και ακόμη πως η πιθανότητα είναι ένα μη αρνητικό, κανονικοποιημένο και σ-προσθετικό μέτρο.

Σημείωση: Ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας που περιέχεται στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Γενικής Παιδείας της Γ΄ Λυκείου αποτελεί μία προσαρμογή του παραπάνω γενικού αξιωματικού ορισμού στην περίπτωση που ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι πεπερασμένος.

Όπως γνωρίζουμε, σε ένα αξιωματικό σύστημα τα αξιώματα πρέπει να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, δηλαδή ένα αξίωμα να μην παράγεται από τα υπόλοιπα. Όμως, αυτό δεν το έχουν τηρήσει οι συγγραφείς του παραπάνω σχολικού βιβλίου, αφού η πρόταση $P(\omega_i) \leq 1,\ i = 1, ..., \nu$ προκύπτει από τις υπόλοιπες και επομένως θα μπορούσε να είχε παραλειφθεί.

---

[2] Είναι μία μη κενή συλλογή υποσυνόλων του Ω, η οποία έχει τις ιδιότητες: i) αν $A \in F$ τότε και $A^c \in F$ και ii) αν A_1, A_2, … ανήκουν στην F, τότε και η ένωσή τους ανήκει στην F, δηλαδή $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$. Αποδεικνύεται ότι $\Omega \in F$ & $\varnothing \in F$ και ακόμη πως αν A_1, A_2, … ανήκουν στην F τότε και η τομή τους ανήκει στην F, δηλαδή $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in F$.