Η σχέση της διάταξης στο *IR*

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
πρώην Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Πρόλογος

Η εργασία αυτή γράφτηκε με αφορμή την κυκλικότητα που παρατηρείται στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου στην προσέγγιση της σχέσης της διάταξης στο *IR* και αποτελείται από δύο ενότητες. Στην πρώτη ενότητα ορίζεται η έννοια των θετικών πραγματικών αριθμών και ορίζεται η σχέση της διάταξης στο *IR*. Στην δεύτερη ενότητα περιγράφεται η αξιωματική θεμελίωση του διατεταγμένου σώματος των πραγματικών αριθμών και εξηγείται γιατί το σώμα των μιγαδικών αριθμών δεν είναι διατεταγμένο. Τέλος, στο παράρτημα που παρατίθεται αποδεικνύεται ότι το αξίωμα της πληρότητας δεν ισχύει στο σύνολο των ρητών αριθμών.

Εισαγωγή

Στο σχολικό βιβλίο της άλγεβρας της Α΄ Λυκείου η παράγραφος που αναφέρεται στην έννοια της διάταξης στο σύνολο των πραγματικών αριθμών αρχίζει ως εξής:

« *Έννοια της διάταξης*

Οι έννοιες «μεγαλύτερος από», «μικρότερος από», που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο, ορίστηκαν ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ

*Ένας αριθμός **α** λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από έναν αριθμό **β**, και γράφουμε **α > β**, όταν η διαφορά **α – β** είναι θετικός αριθμός.*

*Στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι ο β είναι **μικρότερος** του α και γράφουμε $\beta < \alpha$.*

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει αμέσως ότι:

- *Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.*
- *Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.*

Έτσι ο αρχικός ορισμός γράφεται ισοδύναμα:

$$\boldsymbol{\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0.} \text{ »}$$

Σχολιάζοντας το παραπάνω κείμενο αναφέρω τα εξής:

1. Η έννοια της διάταξης στο γυμνάσιο, που επικαλούνται οι συγγραφείς του συγκεκριμένου βιβλίου, δίνεται διαισθητικά και εμπειρικά και όχι με αυστηρό τρόπο όπως ταιριάζει στο λύκειο.

2. Οι μαθητές της Α΄ Λυκείου γνωρίζουν ότι κάθε έννοια που χρησιμοποιείται για τον ορισμό μιας νέας έννοιας, αν δεν είναι πρωταρχική, πρέπει να έχει οριfeaturesθεί νωρίτερα. Όμως, στον παραπάνω ορισμό βλέπουν ότι για τον ορισμό της έννοιας του *«μεγαλύτερου από»,* στο σύνολο των πραγματικών αριθμών χρησιμοποιείται η έννοια των *θετικών πραγματικών αριθμών* χωρίς όμως να έχει ορισθεί νωρίτερα ή να αντιμετωπίζεται ως πρωταρχική!

3. Τι νόημα έχει η φράση:
«*Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει αμέσως ότι κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν*», *χωρίς να έχει ορισθεί η έννοια των θετικών πραγματικών αριθμών*;
Αν μας ρωτήσει ένας μαθητής ποιος αριθμός λέγεται θετικός, τι θα απαντήσουμε; *Αυτός που είναι μεγαλύτερος του μηδενός;*
Αυτό δεν δημιουργεί κύκλο;
Δηλαδή για τον ορισμό της έννοιας του «μεγαλύτερου από» χρησιμοποιείται η έννοια των θετικών πραγματικών αριθμών και για τον ορισμό της έννοιας των θετικών πραγματικών αριθμών χρησιμοποιείται η έννοια του «μεγαλύτερου από»!

4. Τι σημαίνει η φράση:

« *Έτσι ο αρχικός ορισμός γράφεται ισοδύναμα:*

$$\boldsymbol{\alpha > \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha - \beta > 0} \text{ » ;}$$

Ότι η ισοδυναμία: $\boldsymbol{\alpha > \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha - \beta > 0}$ μπορεί να αποτελέσει ορισμό της έννοιας του «μεγαλύτερου από» ;

Αν είναι έτσι, τότε στο σημείο αυτό είναι άμεσα ορατή η κυκλικότητα, δηλαδή ορίζουμε δια του οριζομένου!

Στις δύο ενότητες που ακολουθούν θα δούμε πώς αντιμετωπίζεται[1] το πρόβλημα αυτό και πώς ορίζεται η σχέση της διάταξης στο *IR*. Πιο συγκεκριμένα, στην πρώτη ενότητα ορίζεται η έννοια των θετικών πραγματικών αριθμών, η οποία στη συνέχεια χρησιμοποιείται για τον ορισμό της έννοιας του «μεγαλύτερου από», ενώ στη δεύτερη δεχόμαστε αξιωματικά την ύπαρξη των θετικών πραγματικών αριθμών, οι οποίοι χρησιμοποιούνται στη συνέχεια για τον ορισμό της έννοιας του «μεγαλύτερου από».

---

[1] Για την σύνταξη της εργασίας αυτής δεν χρησιμοποιήθηκε ιδιαίτερη βιβλιογραφία. Απλά μεταφέρθηκε το πνεύμα και η φιλοσοφία που συναντά κανείς σε βιβλία Μαθηματικών που αναφέρονται στο συγκεκριμένο θέμα.

Η έννοια των θετικών πραγματικών αριθμών και η σχέση της διάταξης στο *IR*

Αρχικά θα ορίσουμε την έννοια των *θετικών πραγματικών αριθμών* σε έξι βήματα ξεκινώντας από το σύνολο των φυσικών αριθμών και στη συνέχεια θα ορίσουμε την έννοια του *«μεγαλύτερου από»* στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Βήμα 1^{o}: (*Ορισμός της έννοιας* του *«μεγαλύτερου από» στο σύνολο N των φυσικών αριθμών*)

***ΟΡΙΣΜΟΣ* 1**

*Ένας φυσικός αριθμός **α** λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από ένα φυσικό αριθμό **β** και γράφουμε $\boldsymbol{\alpha > \beta}$, όταν υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $\boldsymbol{\tau \neq 0}$ τέτοιος ώστε να ισχύει $\boldsymbol{\alpha = \beta + \tau}$.*

Βήμα 2^{o}: (*Ορισμός της έννοιας των θετικών ακεραίων αριθμών*)

Στο σύνολο NxN ορίζουμε τη διμελή σχέση σ ως εξής:

$$(\kappa, \lambda)\sigma(\mu, \nu) \quad \text{εάν} \quad \kappa + \nu = \lambda + \mu.$$

Αποδεικνύεται ότι η σχέση σ είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο NxN, οπότε διαμερίζει το NxN σε κλάσεις ισοδυναμίας. Κάθε κλάση ισοδυναμίας ορίζει έναν ακέραιο αριθμό. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να ορίσουμε αυστηρά το σύνολο Z των ακεραίων αριθμών. Δεν θα επεκταθούμε στον ορισμό των πράξεων στο σύνολο Z, οι οποίες ορίζονται με ανάλογο τρόπο. Θα δώσουμε μόνο την έννοια του θετικών ακεραίων. Έχουμε λοιπόν τον επόμενο ορισμό:

***ΟΡΙΣΜΟΣ* 2**

*Ένας ακέραιος αριθμός **α** λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** του μηδενός και γράφουμε $\boldsymbol{\alpha > 0}$, όταν ισχύει η σχέση $\boldsymbol{\kappa > \lambda}$, όπου $\boldsymbol{(\kappa, \lambda)}$ είναι ένας αντιπρόσωπος της κλάσης του **α**. Κάθε ακέραιος αριθμός $\boldsymbol{\alpha > 0}$ λέγεται θετικός ακέραιος αριθμός.*

Αποδεικνύεται ότι η παραπάνω έννοια ορίζεται καλά, δηλαδή δεν εξαρτάται από τον αντιπρόσωπο που παίρνουμε για την κλάση του α. Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι η σχέση $\kappa > \lambda$ ορίσθηκε στο προηγούμενο βήμα, αφού οι αριθμοί κ και λ είναι φυσικοί.
Με το σύμβολο Z_+ θα παριστάνουμε στο εξής το σύνολο των θετικών ακεραίων.

Βήμα 3^{o}: (*Ορισμός της έννοιας* του *«μεγαλύτερου από» στο σύνολο των ακεραίων αριθμών*)

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του *«μεγαλύτερου από»* στο σύνολο των ακεραίων αριθμών. Έτσι έχουμε τον επόμενο ορισμό:

***ΟΡΙΣΜΟΣ* 3**

> *Ένας ακέραιος αριθμός **α** λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από έναν ακέραιο αριθμό **β** και γράφουμε **α > β**, όταν η διαφορά **α – β** είναι θετικός ακέραιος αριθμός, δηλαδή όταν ισχύει η σχέση **α – β > 0**.*

Σημειώνεται ότι η σχέση $\alpha - \beta > 0$ ορίσθηκε στο προηγούμενο βήμα.

Βήμα 4^{ο}: (*Ορισμός της έννοιας των θετικών ρητών αριθμών*)

Στο σύνολο $Z x Z_+$ ορίζουμε τη διμελή σχέση σ ως εξής:

$$(\kappa, \lambda)\sigma(\mu, \nu) \quad \text{εάν} \quad \kappa\nu = \lambda\mu.$$

Αποδεικνύεται ότι η σ είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $Z x Z_+$, οπότε διαμερίζει το $Z x Z_+$ σε κλάσεις ισοδυναμίας. Κάθε κλάση ορίζει έναν ρητό αριθμό. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να ορίσουμε αυστηρά το σύνολο Q των ρητών αριθμών. Και εδώ δεν θα επεκταθούμε στον ορισμό των πράξεων στο Q, οι οποίες ορίζονται με ανάλογο τρόπο. Θα δώσουμε μόνο την έννοια του θετικών ρητών αριθμών. Έχουμε λοιπόν:

***ΟΡΙΣΜΟΣ* 4**

> *Ένας ρητός αριθμός **α** λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** του μηδενός και γράφουμε **α > 0**, όταν ισχύει η σχέση **κ > 0**, όπου **κ** είναι το πρώτο μέλος ενός αντιπροσώπου της κλάσης του **α**. Κάθε ρητός αριθμός **α > 0** λέγεται θετικός ρητός αριθμός.*

Αποδεικνύεται ότι η παραπάνω έννοια ορίζεται καλά, δηλαδή δεν εξαρτάται από τον αντιπρόσωπο που παίρνουμε για την κλάση του α. Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι η σχέση $\kappa > 0$ ορίζεται στο 2^{ο} βήμα, αφού ο αριθμός κ είναι ακέραιος.

Βήμα 5^{ο}: (*Ορισμός της έννοιας* του *«μεγαλύτερου από» στο σύνολο των ρητών αριθμών*)

Θα ορίσουμε τώρα την έννοια του *«μεγαλύτερου από»* στο σύνολο των ρητών αριθμών. Έχουμε λοιπόν τον επόμενο ορισμό:

***ΟΡΙΣΜΟΣ* 5**

> *Ένας ρητός αριθμός **α** λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από έναν ρητό αριθμό **β** και γράφουμε **α > β**, όταν η διαφορά **α – β** είναι θετικός ρητός αριθμός, δηλαδή ισχύει η σχέση **α – β > 0**.*

Σημειώνεται ότι η σχέση $\alpha - \beta > 0$ ορίσθηκε στο προηγούμενο βήμα.

<u>Βήμα 6ο</u>: (*Ορισμός της έννοιας των θετικών πραγματικών αριθμών*)

Θεωρούμε ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών έχει θεμελιωθεί με τη βοήθεια ακολουθιών Cauchy των οποίων οι όροι είναι ρητοί αριθμοί. Δηλαδή κάθε πραγματικός αριθμός ορίζεται ως μία κλάση τέτοιων ακολουθιών. Έτσι έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

***ΟΡΙΣΜΟΣ* 6**

Έστω $\boldsymbol{\alpha}$ ένας πραγματικός αριθμός και $\left(a_{\nu}\right)_{\nu\in IN^*}$ ένας αντιπρόσωπος της κλάσης του $\boldsymbol{\alpha}$. Θα λέμε ότι ο $\boldsymbol{\alpha}$ είναι **μεγαλύτερος** του μηδενός και θα γράφουμε $\boldsymbol{\alpha > 0}$, *όταν* υπάρχουν θετικός ρητός αριθμός $\boldsymbol{\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$) και φυσικός αριθμός ν_o ώστε να ισχύει $a_\nu > \varepsilon$ για κάθε $\nu > \nu_o$. Ένας πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος του μηδενός λέγεται θετικός πραγματικός αριθμός.

Αποδεικνύεται ότι η παραπάνω έννοια ορίζεται καλά, δηλαδή δεν εξαρτάται από τον αντιπρόσωπο που παίρνουμε για την κλάση του α. Επίσης, σημειώνεται ότι η σχέση $a_\nu > \varepsilon$ ορίζεται στο προηγούμενο βήμα, αφού οι αριθμοί ε και a_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ είναι ρητοί αριθμοί καθώς και ότι η σχέση $\nu > \nu_o$ ορίζεται στο πρώτο βήμα.

<u>Βήμα 7ο</u>: (*Ορισμός της έννοιας* του *«μεγαλύτερου από» στο σύνολο των πραγματικών αριθμών*)

Τώρα ορίζουμε την έννοια του *«μεγαλύτερου από»* στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ως εξής:

***ΟΡΙΣΜΟΣ* 7**

*Ένας πραγματικός αριθμός **α** λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από έναν πραγματικό αριθμό **β** και γράφουμε **α > β**, όταν η διαφορά **α – β** είναι θετικός πραγματικός αριθμός, δηλαδή όταν ισχύει η σχέση **α – β > 0**.*

Σημειώνεται ότι η σχέση $\alpha - \beta > 0$ ορίσθηκε στο προηγούμενο βήμα.

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε τη σχέση της διάταξης “ $\geq$ ” στο IR, δηλαδή λέμε ότι ένας πραγματικός αριθμός $\boldsymbol{\alpha}$ είναι μεγαλύτερος από έναν πραγματικό αριθμό $\boldsymbol{\beta}$ ή ίσος με τον $\boldsymbol{\beta}$ (συμβολικά $\boldsymbol{\alpha \geq \beta}$) εάν $\boldsymbol{\alpha > \beta}$ ή $\boldsymbol{\alpha = \beta}$.

<u>Σημείωση:</u> Ακολουθήθηκε η παραπάνω διαδικασία για τον ορισμό της έννοιας του «μεγαλύτερου από», επειδή ταιριάζει στο πνεύμα του σχολικού βιβλίου, δηλαδή για τον ορισμό της έννοιας αυτής χρησιμοποιείται η έννοια των θετικών αριθμών, η οποία όμως εδώ ορίζεται σε αντίθεση με το σχολικό βιβλίο.
Μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του «μεγαλύτερου από» και απ’ ευθείας, χωρίς δηλαδή τη χρήση της έννοιας των θετικών αριθμών. Έχουμε λοιπόν με τη σειρά τους παρακάτω ορισμούς:

ΟΡΙΣΜΟΣ Α

*Ένας φυσικός αριθμός **α** λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από ένα φυσικό αριθμό **β** και γράφουμε **α > β**, όταν υπάρχει ένας φυσικός αριθμός **τ ≠ 0** τέτοιος ώστε να ισχύει **α = β + τ**.*

Για την θεμελίωση του συνόλου των ακεραίων χρησιμοποιούμε και εδώ τη διμελή σχέση σ στο σύνολο *N*x*N* όπως παραπάνω και έχουμε τον επόμενο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ Β

*Ένας ακέραιος αριθμός **α** λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από έναν ακέραιο **β** και γράφουμε **α > β**, όταν ισχύει η σχέση **κ + ν > λ + μ**, όπου **(κ, λ)** είναι ένας αντιπρόσωπος της κλάσης του **α** και **(μ, ν)** ένας αντιπρόσωπος της κλάσης του **β**.*

Επίσης, για την θεμελίωση του συνόλου των ρητών αριθμών χρησιμοποιούμε και εδώ τη διμελή σχέση σ στο σύνολο $Z \times Z_+$ όπως παραπάνω. Σύμφωνα με τον ορισμό *Β* ένας ακέραιος αριθμός ***α*** λέγεται θετικός όταν ισχύει η σχέση $\kappa + \mu > \lambda + \mu \Leftrightarrow \kappa > \lambda$ (δείτε και ορισμό 2), όπου (κ, λ) είναι ένας αντιπρόσωπος της κλάσης του ***α*** και (μ, μ) ένας αντιπρόσωπος της κλάσης του μηδενός.

ΟΡΙΣΜΟΣ Γ

*Ένας ρητός αριθμός **α** λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από ένα ρητό **β** και γράφουμε **α > β**, όταν ισχύει η σχέση **κν > λμ**, όπου **(κ, λ)** είναι ένας αντιπρόσωπος της κλάσης του **α*** και (***μ***, ***ν***) ένας αντιπρόσωπος της κλάσης του ***β***.

ΟΡΙΣΜΟΣ Δ

Αν ***α*** και ***β*** είναι δύο πραγματικοί αριθμοί και $(a_\nu)_{\nu \in IN^*}$, $(\beta_\nu)_{\nu \in IN^*}$ αντιπρόσωποι των κλάσεων των ***α** και **β** αντίστοιχα*, θα λέμε ότι ο ***α*** είναι **μεγαλύτερος** του ***β*** και θα γράφουμε ***α* > β**, *όταν* υπάρχουν θετικός ρητός αριθμός ***ε*** ($\varepsilon > 0$) και φυσικός αριθμός ν_o ώστε να ισχύει $a_\nu - \beta_\nu > \varepsilon$ για κάθε $\nu > \nu_o$.

Αξιωματική θεμελίωση του διατεταγμένου σώματος των πραγματικών αριθμών

Συνήθως σε βιβλία Ανάλυσης δεν ακολουθείται η παραπάνω αναλυτική διαδικασία, αλλά προτιμάται ένας αξιωματικός τρόπος θεμελίωσης του διατεταγμένου σώματος των πραγματικών αριθμών, όπως αυτός που παρουσιάζεται παρακάτω.

Δεχόμαστε ότι στο IR ορίζονται δύο εσωτερικές πράξεις, η πρόσθεση (+) και ο πολλαπλασιασμός (·), για τις οποίες ισχύουν τα παρακάτω αξιώματα:

Α. ***Αξιώματα της πρόσθεσης***

1. $x + y = y + x, \ \forall x, y \in IR$
2. $(x + y) + z = x + (y + z), \ \forall x, y, z \in IR$
3. Υπάρχει μοναδικό *ουδέτερο* στοιχείο, το μηδέν (0), δηλαδή ισχύει:

$$x + 0 = 0 + x = x, \ \forall x \in IR$$

4. Για κάθε $x \in IR$ υπάρχει μοναδικό *αντίθετο* στοιχείο $x' \in IR$, για το οποίο ισχύει: $x + x' = x' + x = 0$.
(Για το αντίθετο στοιχείο κάθε $x \in IR$ χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $-x$).

Β. ***Αξιώματα του πολλαπλασιασμού***

5. $x \cdot y = y \cdot x, \ \forall x, y \in IR$
6. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \ \forall x, y, z \in IR$
7. Υπάρχει μοναδικό *ουδέτερο* στοιχείο, το ένα (1) , δηλαδή ισχύει:

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \ \forall x \in IR$$

8. Για κάθε πραγματικό αριθμό $x \neq 0$ υπάρχει μοναδικό *αντίστροφο* στοιχείο $x' \in IR$, για το οποίο ισχύει: $x \cdot x' = x' \cdot x = 1$.
(Για το αντίστροφο στοιχείο κάθε πραγματικού $x \neq 0$ χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\frac{1}{x}$).

Γ. ***Αξίωμα που συνδέει τις δύο πράξεις***

9. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \ \forall x, y, z \in IR$.

Οι πράξεις της *αφαίρεσης* (-) και της *διαίρεσης* (:) στο IR ορίζονται ως εξής:

$x - y = x + (-y), \ \forall x, y \in IR$ και
$x : y = x \cdot \frac{1}{y}, \ \forall x, y \in IR$ με $y \neq 0$.

Δ. Αξιώματα για τη διάταξη

Δεχόμαστε ότι υπάρχει ένα υποσύνολο IR_+ του IR για το οποίο ισχύουν τα αξιώματα:

10. Για κάθε $x, y \in IR_+$ ισχύει $x + y \in IR_+$ (το IR_+ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση).
11. Για κάθε $x, y \in IR_+$ ισχύει $x \cdot y \in IR_+$ (το IR_+ είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό).
12. Για κάθε $x \in IR$ ισχύει: ή $x \in IR_+$ ή $-x \in IR_+$ ή $x = 0$.

Τους πραγματικούς αριθμούς που ανήκουν στο IR_+ τους καλούμε *θετικούς* πραγματικούς αριθμούς, ενώ τους πραγματικούς αριθμούς που είναι διάφοροι του 0 και δεν ανήκουν στο IR_+ τους καλούμε *αρνητικούς* πραγματικούς αριθμούς. Το σύνολο όλων των αρνητικών πραγματικών αριθμών το συμβολίζουμε με το σύμβολο IR_-.
Παρατηρούμε ότι τα σύνολα IR_+, $\{0\}$ και IR_- αποτελούν μία διαμέριση του IR.

Τώρα είμαστε σε θέση να ορίσουμε την έννοια του *«μεγαλύτερου από»* στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Έχουμε λοιπόν τον παρακάτω ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Λέμε ότι ένας πραγματικός αριθμός $\boldsymbol{\alpha}$ *είναι μεγαλύτερος από έναν πραγματικό αριθμό* $\boldsymbol{\beta}$ *και γράφουμε* $\boldsymbol{\alpha > \beta}$, *όταν η διαφορά* $\boldsymbol{\alpha - \beta}$ *ανήκει στο* $\boldsymbol{IR_+}$, δηλαδή *όταν* η διαφορά $\boldsymbol{\alpha - \beta}$ είναι θετικός πραγματικός αριθμός.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι ισχύουν οι ισοδυναμίες:

(i) $\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha \in IR_+$ (α θετικός) και

(ii) $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$, όπου $\alpha, \beta \in IR$.

Όλα τα παραπάνω αξιώματα ισχύουν και στο σύνολο των ρητών αριθμών, το οποίο για αυτό είναι ένα διατεταγμένο σώμα, όχι όμως πλήρες όπως το σώμα των πραγματικών αριθμών. Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών για την διάταξη ισχύει επιπλέον το παρακάτω αξίωμα που είναι γνωστό ως *αξίωμα πληρότητας*, το οποίο όμως δεν ισχύει στο σύνολο των ρητών αριθμών (μπορείτε να δείτε στο παράρτημα μία απόδειξη). Με το αξίωμα πληρότητας το σύνολο των πραγματικών αριθμών καθίσταται ένα *πλήρως διατεταγμένο σώμα.* Αποδεικνύεται ότι κάθε πλήρως διατεταγμένο σώμα είναι ισόμορφο του IR.

Πριν διατυπώσουμε το αξίωμα της πληρότητας του IR πρέπει να δώσουμε τον παρακάτω ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα υποσύνολο A του IR λέγεται **άνω φραγμένο** εάν υπάρχει πραγματικός αριθμός φ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει $x \leq \varphi$.

Ε. Αξίωμα πληρότητας

13. Κάθε άνω φραγμένο υποσύνολο του συνόλου *IR* των πραγματικών αριθμών έχει ελάχιστο άνω φράγμα στο *IR*.

Το ελάχιστο άνω φράγμα ενός άνω φραγμένου υποσυνόλου *A* του *IR* το λέμε *supremum* του *A* και γράφουμε *supA*.

Στο σημείο αυτό αξίζει να δούμε γιατί το σώμα *C* των μιγαδικών αριθμών δεν είναι διατεταγμένο. Προς τούτο πρέπει πρώτα να αποδείξουμε την παρακάτω πρόταση.

<u>Πρόταση</u>: Αν X είναι ένα διατεταγμένο σώμα (ικανοποιούνται τα παραπάνω αξιώματα 1 - 12), τότε:

i) Για κάθε $x \in X$ με $x \neq 0$ ισχύει $x^2 = x \cdot x \in X_+$ και
ii) $1 \in X_+$.

Απόδειξη

i) Έστω $x \in X$ με $x \neq 0$.
Αν $x \in X_+$, τότε από το αξίωμα 11 προκύπτει ότι $x^2 \in X_+$.
Αν $x \notin X_+$, τότε $-x \in X_+$ και $(-x)^2 \in X_+$. Όμως $(-x)^2 = x^2$ (κανόνας των προσήμων).
Άρα για κάθε $x \in X$ με $x \neq 0$ ισχύει $x^2 \in X_+$.

ii) 1

Από την πρόταση που αποδείχθηκε στο (**i**) προκύπτει ότι $1^2 \in X_+$.
Όμως $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$.
Άρα $1 \in X_+$.

ii) 2ος τρόπος (με απαγωγή σε άτοπο):

Αν $1 \notin X_+$ τότε $-1 \in X_+$ (αξίωμα 12). Έτσι λοιπόν για κάθε $x \in X_+$ θα ισχύει $(-1) \cdot x \in X_+$ (αξίωμα 11). Όμως $(-1) \cdot x = -x$ (κανόνας των προσήμων). Δηλαδή προκύπτει ότι και $-x \in X_+$ που είναι άτοπο.
Άρα $1 \in X_+$.

Έστω τώρα ότι το σώμα *C* των μιγαδικών αριθμών είναι διατεταγμένο. Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση θα ισχύει $i^2 \in C_+$. Όμως $i^2 = -1 \notin C_+$, αφού $1 \in C_+$. Παρατηρούμε ότι καταλήγουμε σε αντίφαση, που είναι άτοπο.
Άρα το σώμα *C* των μιγαδικών αριθμών δεν είναι διατεταγμένο.

Επίλογος

Κλείνοντας τίθεται το ερώτημα με ποιον από τους δύο τρόπους θα μπορούσε να διδαχθεί η σχέση της διάταξης στην Α΄ Λυκείου.

Επειδή ο σκοπός της διδασκαλίας της Άλγεβρας στο λύκειο δεν είναι η θεμελίωση του διατεταγμένου σώματος των πραγματικών αριθμών με αυστηρό τρόπο, αλλά η καλλιέργεια της κριτικής, ορθολογικής, αναλυτικής, διαισθητικής και συνθετικής σκέψης των μαθητών θα μπορούσαμε να μείνουμε στην διαισθητική και εμπειρική προσέγγιση της σχέσης της διάταξης που έγινε στο γυμνάσιο και να αποφευχθεί έτσι ένας αυστηρός ορισμός, όπως άλλωστε γίνεται και με τις πράξεις. Αν όμως πρέπει οπωσδήποτε να χρησιμοποιηθεί ένας τρόπος, ώστε να υπάρξει η διαφοροποίηση από το γυμνάσιο, νομίζω πως ο τρόπος που ενδείκνυται είναι ο αξιωματικός.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Εδώ θα αποδείξουμε με τη βοήθεια ενός αντιπαραδείγματος ότι δεν ισχύει γενικά το αξίωμα της πληρότητας στο σύνολο των ρητών αριθμών.

Έστω λοιπόν το σύνολο:

$$A = \left\{ x \in Q \,/\, x < 0 \text{ ή } x^2 \le 2 \right\}.$$

Παρατηρούμε ότι το A είναι άνω φραγμένο. Θα αποδείξουμε ότι δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα (*supremum*) στο σύνολο των ρητών αριθμών.

Έστω ότι το παραπάνω σύνολο A έχει *supremum* στο σύνολο των ρητών αριθμών και έστω $supA = b$ όπου $b \in Q$. Για τον αριθμό b διακρίνουμε τις περιπτώσεις: $b^2 = 2$, $b^2 > 2$ και $b^2 < 2$. Εξετάζοντας κάθε περίπτωση χωριστά έχουμε:

<u>*1η περίπτωση*</u>: Αν $b^2 = 2$, τότε είναι $b = \sqrt{2}$. Όμως, ο αριθμός $\sqrt{2}$, όπως αποδεικνύεται, δεν είναι ρητός.

<u>*2η περίπτωση*</u>: Αν $b^2 > 2$, τότε θεωρώντας τον ρητό αριθμό $\varepsilon = \dfrac{b^2 - 2}{2b}$ (προφανώς $b \neq 0$), αποδεικνύεται εύκολα ότι ο ρητός αριθμός $b - \varepsilon$ είναι επίσης άνω φράγμα του A, που είναι άτοπο αφού $b - \varepsilon < b$.

<u>*3η περίπτωση*</u>: Αν $b^2 < 2$, τότε θεωρώντας τον ρητό αριθμό $\varepsilon = \dfrac{2 - b^2}{2b + 1}$ (θα ισχύει $1 < b$, γιατί $1 \in A$), αποδεικνύεται εύκολα ότι για τον ρητό $b + \varepsilon$ ισχύει $(b + \varepsilon)^2 < 2$, δηλαδή $b + \varepsilon \in A$, που είναι άτοπο, διότι $b < b + \varepsilon$ και ο αριθμός b είναι άνω φράγμα του A.

Άρα το υποσύνολο A του Q, ενώ είναι άνω φραγμένο, δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα στο σύνολο των ρητών αριθμών.