Ακέραιες Αλγεβρικές Παραστάσεις, Πολυώνυμα και Μονώνυμα

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος κλάδου ΠΕ03
www.p-theodoropoulos.gr

Από διδακτική άποψη, ο τρόπος που προσεγγίζονται οι παραπάνω έννοιες στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου κατά τη γνώμη μου είναι ορθός, διότι γίνεται μετάβαση από μια γενικότερη έννοια σε μια πιο ειδική, δηλαδή ακολουθείται η παρακάτω πορεία:

Αλγεβρικές παραστάσεις → Ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις → Μονώνυμα

Ξεκινάμε με τις αλγεβρικές παραστάσεις, σε αντιπαραβολή με τις αριθμητικές, όπου δε μπαίνουν περιορισμοί για τις πράξεις, στη συνέχεια προχωράμε στις ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις όπου μπαίνουν μερικοί περιορισμοί και καταλήγουμε στα μονώνυμα όπου οι περιορισμοί είναι περισσότεροι.

Όμως, νομίζω ότι οι έννοιες αυτές δεν ορίζονται σωστά στο παραπάνω σχολικό βιβλίο. Η αλήθεια είναι πως δεν είναι και εύκολο να δοθεί με περιγραφικό τρόπο ένας ορισμός, ο οποίος να καλύπτει όλες τις περιπτώσεις.
Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

Α. Ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις

Στη σελίδα 25 εισάγεται η έννοια της ακέραιας αλγεβρικής παράστασης και ορίζεται ως εξής:

«Μία αλγεβρική παράσταση λέγεται ***ακέραια****, όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί».*

Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό οι αλγεβρικές παραστάσεις:

$$\frac{10}{x^3+xy+x^2y} \quad \text{και} \quad 5+\sqrt{x^2+xy+y^2},$$

για παράδειγμα, είναι ακέραιες, αφού μεταξύ των μεταβλητών τους σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών τους είναι φυσικοί αριθμοί. Όμως, όπως γνωρίζουμε οι παραστάσεις αυτές δεν είναι ακέραιες.

Θα πρότεινα λοιπόν να εμπλουτίζεται η διδασκαλία των αλγεβρικών παραστάσεων με διάφορα παραδείγματα παραστάσεων όπου θα γίνονται όλες οι δυνατές πράξεις ώστε οι παραστάσεις να απλοποιούνται. Οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου στο σημείο αυτό γνωρίζουν τις ιδιότητες των δυνάμεων, την επιμεριστική ιδιότητα κλπ., οπότε μπορούν να απλοποιούν παραστάσεις. Άλλωστε είναι εξοικειωμένοι με την απλοποίηση

αλγεβρικών παραστάσεων από τη Β΄ τάξη. Όταν λοιπόν απλοποιήσουμε την παράσταση φροντίζοντας παράλληλα οι εκθέτες των μεταβλητών της να είναι φυσικοί αριθμοί και διάφοροι του μηδενός, τότε θα λέμε ότι η αλγεβρική παράσταση είναι σε **απλοποιημένη μορφή**[1].
Η έννοια της απλοποιημένης μορφής μιας αλγεβρικής παράστασης εισάγεται για να χρησιμοποιηθεί στον ορισμό της ακέραιας αλγεβρικής παράστασης που προτείνω να ορίζεται σύμφωνα με τον παρακάτω ορισμό, ο οποίος είναι πλήρης και προσαρμοσμένος στο επίπεδο των μαθητών.

*Μία αλγεβρική παράσταση, η οποία στην απλοποιημένη της μορφή δεν περιέχει διαίρεση με μεταβλητή στο διαιρέτη ούτε ριζικό με μεταβλητή στην υπόρριζη ποσότητα, λέγεται **ακέραια αλγεβρική παράσταση ή πολυώνυμο.***

Να σημειωθεί ότι διαίρεση σε μια παράσταση μπορεί να εκφράζεται και με μορφή κλάσματος.

Παρατηρούμε ότι με αυτόν τον ορισμό αποκλείονται οι παραπάνω αλγεβρικές παραστάσεις από τις ακέραιες. Επίσης, οι αλγεβρικές παραστάσεις:

$$7x^3-4xy^4+2xy\ ,\quad \frac{3x^2+6xy^5-y}{5+\sqrt{7}}\ ,\quad \frac{9x^2-8xy}{2x}+10xy\ \left(=\frac{9}{2}x-4y+10xy\right),$$

για παράδειγμα, είναι ακέραιες και αυτό υποστηρίζεται και από τον προτεινόμενο ορισμό.

Οι έννοιες της ακέραιας αλγεβρικής παράστασης και του πολυωνύμου είναι ταυτόσημες. Σχετικά στο βιβλίο του Κάππου "***Απειροστικός Λογισμός***" (1962) διαβάζουμε: «*Καλούμεν ακεραίαν ρητήν συνάρτησιν ή συντόμως πολυώνυμον…*».
Δε χρειάζεται επομένως άλλος ορισμός για την έννοια του πολυωνύμου. Μόνο ανάλυση της έννοιας του πολυωνύμου θα γίνει μετά τον ορισμό του μονωνύμου.

Β. Μονώνυμα

Στο σχολικό βιβλίο στη σελίδα 26 δίνεται η έννοια του μονωνύμου ως εξής:

«*Οι ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις, στις οποίες μεταξύ των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού, λέγονται **μονώνυμα***».

Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό η ακέραια αλγεβρική παράσταση:

$$13+x^3yz^2$$

είναι μονώνυμο, αφού μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού, ενώ όπως γνωρίζουμε δεν είναι μονώνυμο.

Για την έννοια του μονωνύμου προτείνω τον επόμενο ορισμό:

*Μία ακέραια αλγεβρική παράσταση λέγεται **μονώνυμο,** αν δεν περιέχει τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ή αν τις περιέχει γίνονται μόνο μεταξύ αριθμών.*

Για παράδειγμα, οι παραστάσεις: $3x^2y^3z$ και $-7x^4y^3z^6$ είναι μονώνυμα, διότι δεν υπάρχουν σ' αυτές οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Επίσης και οι παρα-

[1] Η έννοια αυτή είναι ανάλογη των εννοιών του ανάγωγου κλάσματος και της ανηγμένης μορφής ενός πολυωνύμου.

στάσεις: $(5+\sqrt{2})x^4y^2$ και $\dfrac{3x^5y^3z^2}{7-\sqrt{3}}$ είναι μονώνυμα, διότι οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης γίνονται μόνο μεταξύ αριθμών.

Να σημειωθεί ότι στο συντελεστή ενός μονωνύμου επιτρέπονται όλες οι πράξεις.

<u>Γ΄ Πολυώνυμα</u>

Τέλος, στο σχολικό βιβλίο στη σελίδα 83 (Επανάληψη - Ανακεφαλαίωση) αναφέρεται ο παρακάτω ορισμός της έννοιας του πολυωνύμου.

«Πολυώνυμο λέγεται το άθροισμα μονωνύμων, που δύο τουλάχιστον από αυτά δεν είναι όμοια».

Ο ορισμός αυτός εκφράζει μια παλιά αντίληψη για την έννοια του πολυωνύμου.
Στη σύγχρονη άλγεβρα, το σύνολο των πολυωνύμων εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αποτελεί μοναδιαίο αντιμεταθετικό δακτύλιο (ακεραία περιοχή). Αυτό σημαίνει ότι στο σύνολο των πολυωνύμων οι παραπάνω πράξεις είναι εσωτερικές. Έτσι, το άθροισμα π. χ. των πολυωνύμων:

$$P(x)=5x^2-7x+12 \quad \text{και} \quad Q(x)=7x-12$$

είναι πολυώνυμο.

Παρατηρούμε όμως ότι το άθροισμα $P(x)+Q(x)$ είναι ίσο με $5x^2$, δηλαδή είναι μονώνυμο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα μονώνυμα ανήκουν στο σύνολο των πολυωνύμων. Αυτό σημαίνει ότι τα μονώνυμα θεωρούνται και πολυώνυμα. Άλλωστε, τι νόημα θα είχε ο όρος *«σταθερό πολυώνυμο»*, που αναφέρεται και στο σχολικό βιβλίο; Να σημειωθεί ότι στην παραπάνω αλγεβρική δομή τα σταθερά πολυώνυμα 0 και 1 είναι τα ουδέτερα στοιχεία των πράξεών της.

Στον ορισμό της έννοιας του πολυωνύμου στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου υπονοείται ότι ένα μονώνυμο θεωρείται και πολυώνυμο, διότι δεν αναφέρεται κανένας περιορισμός για τους συντελεστές. Επίσης και στο σχολικό βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου υπονοείται αυτό σε κάποια σημεία και δημιουργείται έτσι μία αντίφαση με τον ορισμό που προαναφέραμε, η οποία δημιουργεί σύγχυση στους μαθητές.
Συγκεκριμένα, τα σημεία αυτά είναι:

1. Στη σελίδα 26 αναφέρεται: «*Συμφωνούμε ακόμη να θεωρούνται και οι αριθμοί ως μονώνυμα*».
   Επίσης, στη σελίδα 33 αναφέρεται: «*Συμφωνούμε, ακόμα, ότι κάθε αριθμός μπορεί να θεωρηθεί και ως πολυώνυμο*».
   Αν δει κανείς αυτές τις συμβάσεις μαζί, συμπεραίνει ότι ένα μονώνυμο θεωρείται και πολυώνυμο.
2. Στη σελίδα 71 δίνεται ο επόμενος ορισμός της έννοιας της ρητής αλγεβρικής παράστασης:
   «*Μία αλγεβρική παράσταση που είναι κλάσμα και οι όροι του είναι πολυώνυμα, λέγεται **ρητή αλγεβρική παράσταση** ή απλώς **ρητή παράσταση***».
   Αν δεχθούμε λοιπόν ότι ένα μονώνυμο δε θεωρείται και πολυώνυμο, τότε σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό η αλγεβρική παράσταση $\dfrac{6x+y}{3x}$, που αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο ως ρητή (σελ. 71), δεν είναι ρητή, αφού ο παρονομαστής της δεν είναι πολυώνυμο!

Ο παραπάνω ορισμός της ρητής αλγεβρικής παράστασης είναι σωστός. Η έννοια της ρητής αλγεβρικής παράστασης είναι γενικότερη της έννοιας του πολυωνύμου, δηλαδή ένα πολυώνυμο θεωρείται και ρητή αλγεβρική παράσταση (με παρονομαστή σταθερό πολυώνυμο), όπως ένας ακέραιος αριθμός θεωρείται και ρητός.