

Το γινόμενο δύο φυσικών αριθμών με δύο άλλους αλγόριθμους

Δρ. Παναγιώτης Α. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος κλάδου ΠΕ03
www.p-theodoropoulos.gr

Εισαγωγή: Στο σχολικό βιβλίο: *Ανάπτυξη εφαρμογών σε προγραμματιστικό περιβάλλον*, της Γ' Λυκείου της Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, αναφέρεται με την ονομασία «πολλαπλασιασμός αλά ρωσικά» ένας αλγόριθμος υπολογισμού του γινομένου δύο θετικών ακεραίων, ο οποίος είναι διαφορετικός από αυτόν που χρησιμοποιούμε. Επειδή θεωρώ ότι από μαθηματική άποψη έχει ενδιαφέρον και ο αλγόριθμος αυτός αλλά και η εξήγησή του, σκέφτηκα να τον παρουσιάσω εδώ για να τον γνωρίσουν όσοι δεν τον ξέρουν. Επίσης, με την ευκαιρία αναφέρω και τον αρχαίο αιγυπτιακό τρόπο πολλαπλασιασμού δύο μη μηδενικών φυσικών αριθμών.

Περιγραφή του ρώσικου πολλαπλασιασμού: Όταν θέλουμε να βρούμε το γινόμενο δύο θετικών ακεραίων με αυτόν τον αλγόριθμο, σχηματίζουμε δύο παράλληλες στήλες σύμφωνα με τον κανόνα: Στην πρώτη γραμμή κάθε στήλης βάζουμε από ένα παράγοντα του γινομένου και στη συνέχεια σε κάθε γραμμή της πρώτης στήλης βάζουμε το διπλάσιο του αριθμού της προηγούμενης γραμμής της στήλης αυτής, ενώ σε κάθε γραμμή της δεύτερης στήλης το ημίτιο της ευκλείδειας διαίρεσης του αριθμού που είναι στην προηγούμενη γραμμή με το 2. Αυτό συνεχίζεται μέχρις ότου στη δεύτερη στήλη προκύψει ημίτιο 1. Κατόπιν προσθέτουμε τους αριθμούς της πρώτης στήλης που έχουν ως αντίστοιχο αριθμό στη δεύτερη στήλη περιττό φυσικό. Το άθροισμα που βρίσκουμε είναι το γινόμενο των δύο αριθμών!
Ο αλγόριθμος θα γίνει περισσότερο κατανοητός με το παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα: Έστω ότι θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε το 12 με το 17. Σύμφωνα με τον παραπάνω αλγόριθμο έχουμε τον επόμενο πίνακα:

12	17
24	8
48	4
96	2
192	1

Παρατηρούμε ότι οι περιττοί αριθμοί της δεύτερης στήλης είναι το 17 και το 1, οπότε το γινόμενο $12 \cdot 17$ είναι:

$$12 \cdot 17 = 12 + 192 = 204$$

που είναι σωστό.

Μπορείτε να πειραματιστείτε και με άλλα ζεύγη φυσικών αριθμών και στη συνέχεια, αν θέλετε, να ασχοληθείτε με την εξήγηση του αλγορίθμου.

Παρατήρηση: Είναι φανερό ότι συμφέρει στη πρώτη γραμμή της δεύτερης στήλης να βάζουμε το μικρότερο παράγοντα. Για παράδειγμα, αν στον παραπάνω πολλαπλασιασμό βάζαμε το 12 στη δεύτερη στήλη, τότε ο αλγόριθμος θα τελείωνε σε 4 βήματα.

Ιστορικό σημείωμα-Σχόλιο: Ο αλγόριθμος αυτός χρησιμοποιήθηκε στη Ρωσία μέχρι τα νεότερα χρόνια και γι' αυτό ίσως να ονομάζεται έτσι. Είναι πάντως σίγουρο πως χρησιμοποιήθηκε και από άλλους λαούς. Είναι δε πιθανό οι ρίζες του να είναι αιγυπτιακές, γιατί αναφέρεται και ως αιγυπτιακός πολλαπλασιασμός.

Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι, όπως προκύπτει από τον πάπυρο Rhind, πολλαπλασίαζαν δύο μη μηδενικούς φυσικούς αριθμούς ως εξής: Αντικαθιστούσαν τον ένα παράγοντα με το 1 και σχημάτιζαν δύο στήλες θέτοντας το 1 στην αρχή της πρώτης και τον άλλον παράγοντα στην αρχή της δεύτερης και διπλασιάζοντας επαναλαμβανόμενα τους δύο αριθμούς μέχρις ότου ο αριθμός της πρώτης στήλης να υπερβεί τον παράγοντα που αντικατεστάθη. Μόλις τον υπερέβαινε, σταματούσαν, χωρίς να γράφουν τους αριθμούς στην περίπτωση αυτή. Κατόπιν έβρισκαν ποιοι αριθμοί της πρώτης στήλης είχαν ως άθροισμα τον παράγοντα που αντικατεστάθη. Το άθροισμα των αντίστοιχων αριθμών της δεύτερης στήλης έδινε το γινόμενο των δύο αριθμών.

Ως παράδειγμα, ας βρούμε το παραπάνω γινόμενο ($12 \cdot 17$) με αυτόν τον τρόπο.

Αντικαθιστούμε λοιπόν το 12 με το 1 και έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

1	17
2	34
4	68
8	136

Επειδή $4 + 8 = 12$, το γινόμενο $12 \cdot 17$ είναι ίσο με $68 + 136 = 204$.

Πρόταση: Μια καλή ιδέα είναι να δοθεί η μελέτη του παραπάνω θέματος ως διαθεματική εργασία στο γυμνάσιο με εμπλεκόμενα γνωστικά αντικείμενα τα Μαθηματικά, την Ιστορία, τη Γεωγραφία και την Πληροφορική.