

Ο αριθμός π ή η σταθερά του Αρχιμήδη

Δρ. Παναγιώτης Α. Θεοδωρόπουλος
 Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Το άρθρο αυτό γράφτηκε με αφορμή την καθιέρωση της 14^{ης} Μαρτίου¹ ως παγκόσμιας ημέρας² της σταθεράς π. Έτσι λοιπόν, μας δίνεται η ευκαιρία να αναφερθούμε στη σημασία, στην ιστορία και στις ιδιότητες του αριθμού π που, όπως λέει και ο *Γαν Στιούαρτ*³, είναι ο πιο ενδιαφέρων αριθμός. Πιστεύω πως θα συμφωνήσουμε με αυτήν την άποψη, αν αναλογιστούμε τις εφαρμογές του αριθμού π στα Μαθηματικά, στην Φυσική και στη Μηχανολογία, τις προσπάθειες που έχουν γίνει για τον υπολογισμό του, τις ιδιότητές του, αλλά και τη σύνδεσή του με το περίφημο πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου.

Η πρόταση για την καθιέρωση της 14^{ης} Μαρτίου ως παγκόσμιας ημέρα του π έγινε το 1988 από τον φυσικό του Exploratorium του San Francisco *Larry Shaw*⁴. Επιλέχθηκε η ημερομηνία αυτή, γιατί στον αμερικάνικο τρόπο γραφής της ημερομηνίας, που όπως γνωρίζουμε προηγείται ο μήνας της ημέρας, η παραπάνω ημερομηνία γράφεται ως εξής: 3–14 ή **3 / 14**, που θυμίζει τα 3 πρώτα ψηφία της ρητής προσέγγισης του π εκφρασμένης στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης (δεκαδική προσέγγιση).

Αρχαίοι λαοί είχαν παρατηρήσει ότι όταν το μήκος της περιφέρειας ενός κύκλου διαιρεθεί με την διάμετρό του, τότε το πηλίκο είναι το ίδιο για όλους τους κύκλους. Οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι απέδιδαν αυτόν τον λόγο με το κλάσμα $\frac{25}{8}$ (19^{ος} αιώνας π.Χ.), οι δε Αιγύπτιοι, όπως προκύπτει από πάπυρο του 17^{ου} αιώνα π.Χ.,

¹ Η ημέρα αυτή είναι και η ημέρα γενεθλίων του Αϊνστάιν.

² Σε πολλές ευρωπαϊκές χώρες γιορτάζεται και στις 22 Ιουλίου (22 / 7), ημερομηνία που οπτικά θυμίζει την ρητή προσέγγιση του Αρχιμήδη για τον αριθμό π, δηλαδή το $\frac{22}{7}$.

³ «Όλοι οι αριθμοί είναι ενδιαφέροντες, μερικοί όμως είναι πιο ενδιαφέροντες από τους άλλους και ο π είναι ο πιο ενδιαφέρων από όλους». *Γαν Στιούαρτ*, Καθηγητής των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Γουόρικ.

⁴ Το 2009 εγκρίθηκε και από την Βουλή των Αντιπροσώπων των Η.Π.Α.

με το κλάσμα $\frac{256}{81}$. Επίσης και άλλοι λαοί, όπως Πέρσες, Ινδοί, Κινέζοι προσπάθησαν να υπολογίσουν αυτόν τον αριθμό.

Εκείνος, όμως, που προσπάθησε πρώτος να προσεγγίσει τον παραπάνω λόγο με θεωρητικό τρόπο και όχι εμπειρικά ήταν ο Αρχιμήδης (3^{ος} αιώνας π.Χ.). Ο Αρχιμήδης προσεγγίζοντας τον κύκλο με εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα⁵ και φθάνοντας στα πολύγωνα με 96 πλευρές κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ο παραπάνω λόγος είναι μεταξύ των ρητών αριθμών $3\frac{10}{71} = \frac{223}{71}$

και $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$. Ο Αρχιμήδης θεώρησε ότι αυτή η προσέγγιση είναι πολύ καλή και γι' αυτό σταμάτησε. Από πολλούς όμως εικάζεται ότι στην εργασία «*Κύκλου μέτρησις*», το πρωτότυπο της οποίας δυστυχώς δεν βρέθηκε, ο Αρχιμήδης οδηγήθηκε στην προσεγγιστική τιμή 3,1416 χρησιμοποιώντας πολύγωνα με 384 πλευρές. Την ίδια προσέγγιση ισχυρίστηκαν ότι πέτυχαν και οι Ινδοί, χωρίς όμως να υπάρχουν τεκμήρια που να υποστηρίζουν αυτόν τον ισχυρισμό. Γι' αυτό λοιπόν δίκαια ο παραπάνω λόγος είναι γνωστός διεθνώς ως **σταθερά του Αρχιμήδη**.

Ο Αρχιμήδης άνοιξε τον δρόμο για μια θεωρητική προσέγγιση του π . Έτσι, όσοι ασχολήθηκαν μετά τον Αρχιμήδη με το θέμα αυτό, και είναι πάρα πολλοί, ακολούθησαν το πνεύμα του Αρχιμήδη. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε τον γερμανό *Ludolph van Ceulen* (*Τσόιλεν*), ο οποίος στις αρχές του 17^{ου} αιώνα μ.Χ. υπολόγισε τα 35 πρώτα ψηφία της δεκαδικής προσέγγισης του π χρησιμοποιώντας κανονικά πολύγωνα με 2⁶² πλευρές. Η τιμή αυτή του π σύμφωνα με επιθυμία του γράφτηκε πάνω στην επιτύμβια στήλη του. Επίσης, ο *Γουίλιαμ Σανκς* κάνοντας υπολογισμούς για 20 χρόνια ανακοίνωσε το 1873 τα 707 πρώτα δεκαδικά ψηφία. Όμως, η προσπάθειά του αυτή υπέστη σοβαρό πλήγμα, όταν με την βοήθεια των πρώτων υπολογιστών⁶ (1945) ανακαλύφθηκε ότι είχε κάνει λάθος στο 528^ο ψηφίο αχρηστεύοντας έτσι όλα τα επόμενα ψηφία.

Το 1706 ο ουαλός μαθηματικός *Γουίλιαμ Τζόουνς* στο βιβλίο του «*Μία Νέα Εισαγωγή στα Μαθηματικά*» συμβόλισε πρώτος την σταθερά του Αρχιμήδη με το ελληνικό γράμμα π , αρχικό γράμμα της ελληνικής λέξης «περιφέρεια». Το σύμβολο π όμως καθιερώθηκε και χρησιμοποιείται σήμερα διεθνώς⁷ όταν το χρησιμοποίησε και ο *Euler* το 1737 στο βιβλίο του «*Variae Observationes circa series infinitas*».

⁵ Ο Αρχιμήδης αξιοποίησε την μέθοδο της προσέγγισης του κύκλου με πολύγωνα που είχαν διατυπώσει και εφαρμόσει νωρίτερα (5^{ος} αιώνας π.Χ.) ο Αντιφών και ο Βρύσων, οι οποίοι ασχολήθηκαν με το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου. Ο Αρχιμήδης ξεκίνησε με κανονικά εξάγωνα και διπλασιάζοντας τον αριθμό των πλευρών των πολυγώνων έφθασε στα κανονικά 96-γωνα.

⁶ Σήμερα με τη βοήθεια των σύγχρονων υπολογιστών έχουν υπολογισθεί δεκάδες δισεκατομμύρια ψηφία του π .

⁷ Όσοι δεν έχουν ελληνικούς χαρακτήρες στους υπολογιστές τους γράφουν pi.

Αξίζει να αναφερθούν ακόμη δύο σταθμοί στην ιστορία του π .

- Το 1767 ο *Γιόχαν Χάινριχ Λάμπερτ* απέδειξε ότι ο π είναι άρρητος αριθμός και
- Το 1882 ο *Φέρντιναντ Φον Λίντεμαν* απέδειξε ότι ο αριθμός π είναι υπερβατικός, δηλαδή δεν αποτελεί ρίζα πολυωνυμικής εξίσωσης με ρητούς ή (ισοδύναμα) με ακέραιους συντελεστές.

Η τελευταία απόδειξη έδωσε την τελική απάντηση στο πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου και συγκεκριμένα ότι ο κύκλος δεν τετραγωνίζεται, αφού, σύμφωνα με θεώρημα της Θεωρίας των Ομάδων, δεν μπορεί να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα μήκους π (ή ισοδύναμα μήκους $\sqrt{\pi}$) επειδή ο π είναι υπερβατικός αριθμός.

Τελειώνοντας αναφέρουμε ότι σε πολλές γλώσσες έχουν επινοηθεί διάφορα στιχάκια για την εύκολη απομνημόνευση των πρώτων ψηφίων της δεκαδικής προσέγγισης του π , όπου ο αριθμός των γραμμάτων κάθε λέξης στη σειρά συμπίπτει με το αντίστοιχο ψηφίο. Στην ελληνική γλώσσα υπάρχει το παρακάτω τετράστιχο (μεταφέρεται σε μονοτονικό σύστημα γραφής), το οποίο αποδίδεται στον καθηγητή των Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών Νικόλαο Ι. Χατζηδάκη (1872 – 1942), γιο του διακεκριμένου καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών Ιωάννη Χατζηδάκη:

*Αεί ο Θεός ο μέγας γεωμετρεί
το κύκλου μήκος ίνα ορίση διαμέτρω
παρήγαγεν αριθμόν απέραντον
και ον φευ! ουδέποτε όλον θνητοί θα εύρωσι*

το οποίο αντιστοιχεί στην παρακάτω δεκαδική προσέγγιση του π

3,1415926535897932384626.

Παρατηρούμε ότι στο παραπάνω τετράστιχο ο Νικόλαος Χατζηδάκης επέκτεινε περίτεχνα την γνωστή φράση του Πλάτωνος «*Αεί ο Θεός γεωμετρεί*» και δημιούργησε αυτό το αριστοτέχνημα στο οποίο προσπαθεί να περιγράψει τον αριθμό π . Αξίζει να αναφερθεί ότι ο Πλάτων έτρεφε μεγάλη εκτίμηση προς τα Μαθηματικά και αναγνωρίζοντας την μεγάλη εκπαιδευτική αξία των Μαθηματικών και ιδιαίτερα της Γεωμετρίας είχε γράψει στην είσοδο της Ακαδημίας την επιγραφή: «*Μηδείς αγεωμέτητος εισίτω...*».

Πηγές:

1. **Αρτεμιάδης Κ. Νικόλαος:** «*Στοιχειώδης Γεωμετρία από Ανώτερη Σκοπιά*». Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (1998).

2. **Gino Loria:** «*Ιστορία των Μαθηματικών*». Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (1971).
3. **Steve Connor:** «*Η πολυτάραχη ζωή της ΣΤΑΘΕΡΑΣ π*». ΒΗΜASCIENCE, Κυριακή 19 Μαρτίου 2006.
4. **Ιστότοποι:**
 - i. <http://www.tmath.gr/sciencerelated/61-mathematics/309-pagkosmies-hmeres>
 - ii. www.exploratorium.edu/pi/
 - iii. www.math-her.gr
 - iv. www.scribd.com/doc/47098380/Περιοδικό-Φύση-και-Μαθηματικά
 - v. <http://www.cosmoscience.gr/2011/01/03/η-παγκόσμια-σταθερά-π>
 - vi. http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_aroni.pdf