

# Τρεις γενικεύσεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Δρ. Παναγιώτης Α. Θεοδωρόπουλος  
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03  
[e-mail@p-theodoropoulos.gr](mailto:e-mail@p-theodoropoulos.gr)

## Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι οι γενικεύσεις αποτελούν χαρακτηριστικό γνώρισμα των Μαθηματικών. Μία γενίκευση<sup>1</sup> μας οδηγεί από ένα σύνολο αντικειμένων σε ένα ευρύτερο, τα αντικείμενα του οποίου έχουν κοινά χαρακτηριστικά με τα αντικείμενα του πρώτου.

Το Πυθαγόρειο θεώρημα δεν έμεινε έξω από αυτή τη διαδικασία. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται τρεις ενδιαφέρουσες γενικεύσεις του Πυθαγορείου θεωρήματος, οι οποίες ήταν γνωστές και στην αρχαιότητα και πιστεύω πως έχουν και διδακτικό ενδιαφέρον.

## 1. Όμοια σχήματα

Η γενίκευση αυτή αφορά στη σχέση των εμβαδών των τετραγώνων που σχεδιάζονται πάνω<sup>2</sup> στις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου και το κύριο στοιχείο της γενίκευσης είναι η **ομοιότητα** που χαρακτηρίζει όλα τα τετράγωνα. Έτσι λοιπόν η σχέση αυτή μεταφέρεται σε όλα τα **όμοια** σχήματα που σχεδιάζονται πάνω στις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου με τρόπο, ώστε οι πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου να είναι ομόλογες πλευρές τους. Δηλαδή, το εμβαδόν ενός σχήματος που σχεδιάζεται πάνω στην υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των ομοίων σχημάτων με αυτό που σχεδιάζονται πάνω στις δύο κάθετες πλευρές με όμοιο τρόπο.

Η παραπάνω γενίκευση ήταν γνωστή και στην αρχαιότητα. Ο Ευκλείδης την αναφέρει στο βιβλίο 6 (πρόταση 31) των *Στοιχείων* ως εξής:

Ε'λά'

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τῆν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τῆν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἶδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενοις.

<sup>1</sup> Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις γενικεύσεις στα Μαθηματικά δείτε: <http://www.p-theodoropoulos.gr/ergasies/mathimat-afairgenik.pdf>

<sup>2</sup> Σχεδιάζονται έτσι ώστε μία πλευρά τους να είναι η πλευρά του τριγώνου.

Στο σχολικό βιβλίο της Γεωμετρίας του Λυκείου η γενίκευση αυτή αναφέρεται σε δύο ασκήσεις. Συγκεκριμένα, στην 6<sup>η</sup> άσκηση των Αποδεικτικών ασκήσεων της παραγράφου 10.5 και στην 6<sup>η</sup> άσκηση των Αποδεικτικών ασκήσεων της παραγράφου 11.2. Να σημειωθεί ότι οι ασκήσεις αυτές αναφέρονται σε πολύγωνα, ενώ η παραπάνω γενίκευση αφορά γενικά σε οποιαδήποτε όμοια σχήματα, π. χ. ημικύκλια κλπ.

Με αφορμή λοιπόν αυτές τις ασκήσεις μπορούμε να αναφερθούμε στην παραπάνω γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος.

## 2. Νόμος των Συνημιτόνων

Ο νόμος των συνημιτόνων (Γεωμετρία Λυκείου, § 9.4 και Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, § 2.4 Β΄ Μέρους) αποτελεί γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος και αφορά στη μετρική σχέση που συνδέει τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου. Το κύριο στοιχείο της γενίκευσης αυτής είναι η **γωνία**.

Έτσι λοιπόν σύμφωνα με τον νόμο των συνημιτόνων το τετράγωνο μιας πλευράς ενός τριγώνου εκφράζεται συναρτήσει των δύο άλλων πλευρών και του **συνημιτόνου<sup>3</sup> της απέναντι γωνίας**.

Γεωμετρικά ο Νόμος των Συνημιτόνων εκφράζεται με τα τρία γνωστά θεωρήματα, το Πυθαγόρειο, της αμβλείας και της οξείας γωνίας, τα οποία διδάσκονται στη Β΄ Λυκείου και αναφέρονται και στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη ως εξής:

### A. Πυθαγόρειο θεώρημα (Βιβλίο 1, πρόταση 47)

A'.μζ'

Έν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τῆν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσῆς πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τῆν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

### B. Θεώρημα αμβλείας γωνίας (Βιβλίο 2, πρόταση 12)

B'.ιβ'

Έν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τῆν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτείνουσῆς πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τῆν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῶ περιεχομένῳ δις ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τῆν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῆ ἀμβλεῖα γωνία.

### Γ. Θεώρημα οξείας γωνίας (Βιβλίο 2, πρόταση 13)

B'.ιγ'

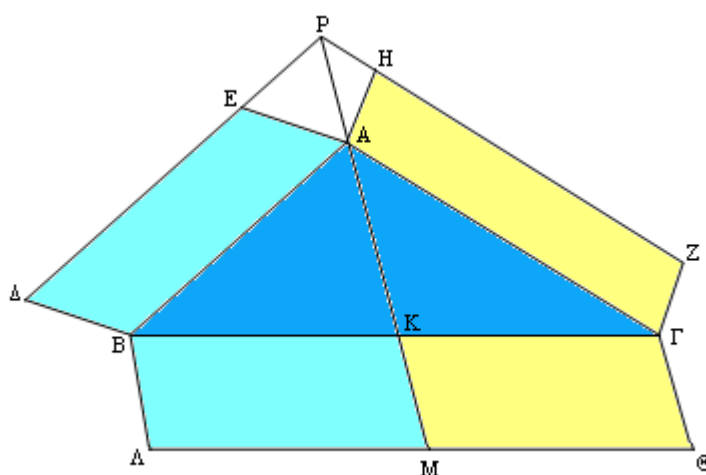
Έν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τῆν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτείνουσῆς πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τῆν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῶ περιεχομένῳ δις ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τῆν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῆ ὀξεῖα γωνία.

<sup>3</sup> Π.χ. για την πλευρά α ισχύει:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ . Αν η γωνία A είναι ορθή, τότε προκύπτει το Πυθαγόρειο θεώρημα.

### 3. Η γενίκευση του Πάππου

Η πιο ενδιαφέρουσα ίσως γενίκευση είναι του Πάππου, η οποία κινείται σε δύο άξονες. Πρώτον, αναφέρεται σε **οποιοδήποτε τρίγωνο** και δεύτερον, πάνω στις πλευρές του τριγώνου σχεδιάζονται **παραλληλόγραμμα**. Να σημειωθεί ότι η έννοια του παραλληλόγραμμου είναι γενικότερη της έννοιας του τετραγώνου. Η γενίκευση του Πάππου περιέχεται στο πρώτο μέρος του βιβλίου IV της *Συναγωγής*<sup>4</sup> και σε μετάφραση διατυπώνεται ως εξής (βλέπε παρακάτω σχήμα):

*Αν πάνω στις δύο πλευρές ενός τριγώνου  $ΑΒΓ$ , έστω τις  $ΑΒ$  και  $ΑΓ$ , σχεδιάσουμε εξωτερικά δύο παραλληλόγραμμα, έστω τα  $ΑΒΔΕ$  και  $ΑΓΖΗ$ , τότε το άθροισμα των εμβαδών των δύο αυτών παραλληλογράμμων είναι ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχεδιάζεται πάνω στην τρίτη πλευρά  $ΒΓ$ , του οποίου δύο πλευρές είναι παράλληλες και ίσες με το τμήμα  $ΡΑ$ , όπου  $Ρ$  το σημείο τομής των ευθειών  $ΔΕ$  και  $ΖΗ$ .*



Αποδεικνύεται εύκολα ότι τα παραλληλόγραμμα  $ΑΒΔΕ$  και  $ΑΓΖΗ$  έχουν το ίδιο εμβαδόν με τα παραλληλόγραμμα  $ΒΚΜΑ$  και  $ΚΓΘΜ$  αντίστοιχα. Η απόδειξη μπορεί να δοθεί ως άσκηση στους μαθητές του λυκείου, η οποία πιστεύω θα κεντρίσει και το ενδιαφέρον τους σχετικά με τη συγκεκριμένη γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Αν σχεδιάσουμε πάνω στις δύο κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου τετράγωνα και εφαρμόσουμε την παραπάνω διαδικασία για να κατασκευάσουμε το παραλληλόγραμμα πάνω στην τρίτη πλευρά που είναι η υποτείνουσα, όπως ορίζεται από τη διαδικασία αυτή, τότε το παραλληλόγραμμα που προκύπτει είναι το τετράγωνο με πλευρές ίσες με την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου. Δηλαδή προκύπτει το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Δείτε στο

<http://www.p-theodoropoulos.gr/ergasies/mathimat-pithag.pdf>

την απόδειξη του πυθαγορείου θεωρήματος που αναφέρεται στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη.

Γι' αυτό λοιπόν, δίκαια η παραπάνω διαδικασία χαρακτηρίζεται ως γενίκευση του Πυθαγορείου θεώρηματος.

<sup>4</sup>Έργο του Πάππου.