Εύρεση του τύπου μιας συνάρτησης f όταν γνωρίζουμε την $f\,'$ και ένα σημείο της γραφικής της παράστασης

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος κλάδου ΠΕ03
www.p-theodoropoulos.gr

Το πρόβλημα της εύρεσης του τύπου μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης, όταν μας δίνονται η παράγωγός της και ένα σημείο της γραφικής της παράστασης, θα αντιμετωπίζεται σύμφωνα με τις οδηγίες της εγκυκλίου 110920/Γ2/09-09-2010 του ΥΠ.Π.Δ.Β.Μ.Θ. όπως στα παρακάτω παραδείγματα.

Ως αρχικό παράδειγμα ας αντιμετωπίσουμε την εφαρμογή 1 της σελίδας 306 την οποία μπορούμε να τη διδάξουμε αναλυτικά σύμφωνα με τις ιδιότητες των παραγουσών συναρτήσεων ως εξής:

Εφαρμογή 1 της σελίδας 306

Να βρεθεί συνάρτηση f τέτοια, ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A(2, 3)$ και να ισχύει $f\,'(x) = 2x – 1$, για κάθε $x \in IR$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι η παράγουσα της συνάρτησης

$$h(x) = 2x - 1$$

για την οποία ισχύει $f(2) = 3$ (1), αφού η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(2, 3)$.

Οι παράγουσες της συνάρτησης h είναι οι συναρτήσεις της μορφής:

$$H(x) = \left(x^2 + c_1\right) - (x + c_2), \quad c_1,\ c_2 \in IR$$

$$= x^2 - x + (c_1 - c_2), \quad c_1,\ c_2 \in IR$$

$$= x^2 - x + c, \quad c \in IR.$$

Επομένως είναι $f(x) = x^2 - x + c_0$ (2), όπου c_0 πραγματικός αριθμός ο οποίος θα προσδιορισθεί σύμφωνα με τη συνθήκη (1). Έχουμε λοιπόν:

$$f(2) = 3 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2^2 - 2 + c_0 = 3 \Leftrightarrow 4 - 2 + c_0 = 3 \Leftrightarrow c_0 = 1.$$

Άρα ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = x^2 - x + 1$.

Σημείωση: *Στην παραπάνω εφαρμογή οι μαθητές θα παρατηρήσουν ότι δε χρειάζεται να προστίθεται ξεχωριστή σταθερά για κάθε όρο του αθροίσματος των συναρτήσεων, αλλά μία για όλους τους όρους. Αυτό θα το συσχετίσουν και με τον κανόνα της παραγώ-*

γισης ενός αθροίσματος συναρτήσεων και έτσι λοιπόν μπορούμε να εργαζόμαστε όπως στο επόμενο παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα</u>

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα (0, +¥) για την οποία ισχύει:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 3\sqrt{x} + 2 \quad \textbf{και} \quad f(1) = 3.$$

<u>Λύση</u>

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι η παράγουσα της συνάρτησης

$$h(x) = \frac{1}{x} + 3\sqrt{x} + 2$$

$$= \frac{1}{x} + 3x^{\frac{1}{2}} + 2$$

για την οποία ισχύει $f(1) = 3$ (1).

Οι παράγουσες της συνάρτησης h είναι οι συναρτήσεις της μορφής:

$$H(x) = \ln x + 3 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2x + c \;=\; \ln x + 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2x + c$$

$$= \ln x + 2\sqrt{x^3} + 2x + c \;=\; \ln x + 2x\sqrt{x} + 2x + c, \quad c \in IR.$$

Συνεπώς είναι

$$f(x) = \ln x + 2x\sqrt{x} + 2x + c_o \text{ (2), όπου } c_o \text{ πραγματικός αριθμός}$$

ο οποίος θα προσδιορισθεί σύμφωνα με τη συνθήκη (1).

Έχουμε λοιπόν:

$$f(1) = 3 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \ln 1 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{1} + 2 \cdot 1 + c_o = 3 \;\Leftrightarrow\; c_o = -1.$$

Άρα ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x) = \ln x + 2x\sqrt{x} + 2x - 1.$$