Παραγοντοποίηση του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $(\alpha \neq 0)$

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
πρώην Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Πρόλογος

Η παραγοντοποίηση ενός πολυωνύμου είναι μία από τις πιο βασικές αλγεβρικές διαδικασίες, πολύ χρήσιμη και αναγκαία σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως στην επίλυση εξισώσεων, στην απλοποίηση ρητών αλγεβρικών παραστάσεων κλπ. Η διδακτική εμπειρία μας διδάσκει ότι όσο πιο συνειδητά και όχι μηχανικά παραγοντοποιούν οι μαθητές ένα πολυώνυμο, τόσο εμπεδώνουν τις τεχνικές της παραγοντοποίησης και μπορούν να ανακαλύπτουν ανάλογες τεχνικές και σε περιπτώσεις άγνωστες για αυτούς. Γι' αυτό λοιπόν στην εργασία αυτή θα αναπτύξουμε μια πρόταση για συνειδητή και όχι μηχανική παραγοντοποίηση από τους μαθητές ενός τριωνύμου της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $(\alpha \neq 0)$ παραθέτοντας και αποσπάσματα από την εγκύκλιο: 144958 / Δ2 / 16-09-2015 «*Οδηγίες για τη διδασκαλία των θετικών μαθημάτων Ημερήσιου και Εσπερινού Γυμνασίου για το σχ. έτος* 2015-2016» του Υπουργείου Παιδείας.

Παραγοντοποίηση του $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $(\alpha \neq 0)$ με διάσπαση του όρου βx

Στην εγκύκλιο 144958 / Δ2 / 16-09-2015 του Υπουργείου Παιδείας, η οποία περιέχει οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στα γυμνάσια, προτείνεται να μην διδάσκεται η παραγοντοποίηση ενός τριωνύμου της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $(\alpha \neq 0)$ με τον τρόπο που ακολουθούσαμε παλιότερα όπου αναζητούσαμε δύο αριθμούς με άθροισμα β και γινόμενο γ (ήταν $\alpha = 1$) κλπ.
Συγκεκριμένα η εγκύκλιος αναφέρει:

§1.6 (Να διατεθούν 6 ώρες)
«*Να μη διδαχθεί η παραγοντοποίηση με άθροισμα και διαφορά κύβων και η παραγοντοποίηση τριωνύμου της μορφής $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$. Να εξαιρεθούν οι ερωτήσεις κατανόησης 6, 7, 10, 11 και οι ασκήσεις 12, 13, 14, 19, 20 και 21. Κατά την κρίση του διδάσκοντος, θα μπορούσαν να δοθούν κάποια απλά τριώνυμα για παραγοντοποίηση με διάσπαση του πρωτοβάθμιου όρου και κοινό παράγοντα*».

Πολύ σωστά κατά την γνώμη μου προτείνεται να μη διδάσκεται η παραγοντοποίηση ενός τριωνύμου με τον τρόπο αυτό, διότι όταν βρίσκαμε με δοκιμές τους αριθμούς που αναζητούσαμε, προβαίναμε αμέσως στην παραγοντοποίηση εφαρμόζοντας την ταυτότητα $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$, την οποία ελάχιστοι μαθητές είχαν συνειδητοποιήσει. Έτσι η παραγοντοποίηση του τριωνύμου με αυτόν τον τρόπο καταντούσε μια μηχανική και άγονη διαδικασία. Επιπλέον, ο τρόπος αυτός έχει και το μειονέκτημα της περιορισμένης εφαρμογής, δηλαδή δεν μπορεί να εφαρμοστεί για κάθε τριώνυμο.

Αντί αυτού του τρόπου στην εγκύκλιο προτείνεται όπως είδαμε να δίνονται για παραγοντοποίηση «*απλά τριώνυμα*[1]», τα οποία θα παραγοντοποιούνται με διάσπαση του πρωτοβάθμιου όρου βx. Όμως, σε ποια «*απλά τριώνυμα*» αναφέρεται η εγκύκλιος;
Μία απάντηση στο ερώτημα αυτό περιέχεται έμμεσα στην ίδια την εγκύκλιο με το παράδειγμα που δίνεται στο παρακάτω χωρίο.

§2.2Α (Να διατεθούν 2 ώρες)

«*Κατά την επίλυση των εξισώσεων* $\alpha x^2 + \beta x = 0$ *και* $\alpha x^2 + \gamma = 0$ *να αποφευχθεί η απομνημόνευση στεγνής μεθοδολογίας και να ενθαρρυνθούν οι μαθητές να αντιμετωπίσουν αυτές τις εξισώσεις με όσα ήδη γνωρίζουν. <u>Κατά την επίλυση της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με παραγοντοποίηση, να μη διδαχθεί η μέθοδος του πολλαπλασιασμού με 4α, αλλά να ενθαρρυνθούν οι μαθητές να επιχειρήσουν την παραγοντοποίηση με διάσπαση του όρου βx</u>.*
Για παράδειγμα: $x^2 + 15x - 16 = 0$ *ή* $x^2 - x + 16x - 16 = 0$ *ή* $x(x-1) + 16(x-1) = 0$ *ή* $(x-1)(x+16) = 0$ *Όσον αφορά τις ασκήσεις 1 έως 6, να γίνει επιλογή μόνο εκείνων των ερωτημάτων που κρίνει ο διδάσκων. Να μη διδαχθεί η άσκηση 7*».

Στο παράδειγμα της εγκυκλίου παρατηρούμε ότι ισχύει $(-\alpha) + (-\gamma) = \beta$ ή (ισοδύναμα) $\alpha + \beta = -\gamma$. Με τον ίδιο τρόπο γίνεται η διάσπαση του όρου βx σε όλα τα τριώνυμα στα οποία ισχύει η παραπάνω σχέση, όπως για παράδειγμα στα τριώνυμα που εμφανίζονται στον πίνακα που ακολουθεί:

$\begin{aligned} 2x^2 + 5x - 7 &= 2x^2 - 2x + 7x - 7 \\ &= 2x(x-1) + 7(x-1) \\ &= (2x+7)(x-1) \\ &= 2\left(x + \frac{7}{2}\right)(x-1) \end{aligned}$	$\begin{aligned} 3x^2 - 8x + 5 &= 3x^2 - 3x - 5x + 5 \\ &= 3x(x-1) - 5(x-1) \\ &= (3x-5)(x-1) \\ &= 3\left(x - \frac{5}{3}\right)(x-1) \end{aligned}$

πίνακας 1

[1] Από ό,τι ξέρω δεν υπάρχει στα Μαθηματικά επίσημα ο όρος αυτός και γι' αυτό μπήκαν τα εισαγωγικά.

Σημείωση: Μπορεί να γίνει διάσπαση του όρου βx με ανάλογο τρόπο και στην περίπτωση που ισχύει $\alpha + \gamma = \beta$, όπως στα τριώνυμα που περιέχονται στον παρακάτω πίνακα:

$3x^2+8x+5 = 3x^2+3x+5x+5$ $= 3x(x+1)+5(x+1)$ $= (3x+5)(x+1)$ $= 3\left(x+\frac{5}{3}\right)(x+1)$	$2x^2-5x-7 = 2x^2+2x-7x-7$ $= 2x(x+1)-7(x+1)$ $= (2x-7)(x+1)$ $= 2\left(x-\frac{7}{2}\right)(x+1)$

πίνακας 2

Παρατήρηση: Στις παραπάνω περιπτώσεις μπορεί να γίνεται διάσπαση του σταθερού όρου γ αντί του πρωτοβάθμιου βx, όπως φαίνεται στα επόμενα παραδείγματα:

$x^2+15x-16 = x^2+15x-1-15$ $= x^2-1+15x-15$ $= (x+1)(x-1)+15(x-1)$ $= (x+1+15)(x-1)$ $= (x+16)(x-1)$	$2x^2-5x-7 = 2x^2-5x-2-5$ $= 2x^2-2-5x-5$ $= 2(x-1)(x+1)-5(x+1)$ $= (2x-2-5)(x+1)$ $= (2x-7)(x+1)$ $= 2\left(x-\frac{7}{2}\right)(x+1)$

πίνακας 3

Θυμάμαι χαρακτηριστικά, όταν χρειάστηκε στην Α΄ Λυκείου σε μία άσκηση να παραγοντοποιηθεί το πολυώνυμο x^3+3x-4 (τριώνυμο τρίτου βαθμού), τότε όσοι μαθητές είχαν εξοικειωθεί με την ιδέα της διάσπασης, διέσπασαν τον σταθερό όρο -4 σε -3-1 και όχι τον πρωτοβάθμιο $3x$ σε $4x$-x.

Γενικά θεωρώ ότι είναι πιο εύκολο για τους μαθητές να διασπάται ο σταθερός όρος γ όταν ισχύει $|\alpha| + |\beta| = |\gamma|$, ενώ όταν ισχύει $|\alpha| + |\gamma| = |\beta|$ να διασπάται ο πρωτοβάθμιος όρος βx (δείτε πίνακα 1, δεύτερο παράδειγμα & πίνακα 2, πρώτο παράδειγμα).

Γι’ αυτό λοιπόν καλό είναι να αφήνουμε τους μαθητές να επιλέγουν κάθε φορά τον όρο που θέλουν να διασπασθεί.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι οι παραπάνω διασπάσεις του όρου βx γίνονται σύμφωνα με τον γενικό κανόνα διάσπασης του πρωτοβάθμιου όρου, ο οποίος αναλύεται παρακάτω:

Γενικός κανόνας διάσπασης του όρου $\boldsymbol{\beta x}$

Ας υποθέσουμε ότι το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $(\alpha\neq 0)$ έχει παραγοντοποιηθεί ως εξής: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x+\mu)(x+\nu)$.
Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}\alpha x^2+\beta x+\gamma &= \alpha(x+\mu)(x+\nu)\\ &= \alpha(x^2+\mu x+\nu x+\mu\nu)\\ &= \alpha x^2+\alpha\mu x+\alpha\nu x+\alpha\mu\nu\end{aligned}$$

ή

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha x^2+(\alpha\mu+\alpha\nu)x+\alpha\mu\nu$$

Παρατηρούμε ότι ισχύουν: $\alpha\mu+\alpha\nu=\beta$ και $\alpha\mu\nu=\gamma$ ή $\alpha\mu\cdot\alpha\nu=\alpha\gamma$.

Άρα, για να παραγοντοποιήσουμε ένα τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $(\alpha\neq 0)$ διασπώντας τον όρο βx και στη συνέχεια εφαρμόζοντας την μέθοδο της ομαδοποίησης, αναζητούμε δύο αριθμούς $\boldsymbol{\kappa}$ και $\boldsymbol{\lambda}$ (αν υπάρχουν) με

$$\boldsymbol{\kappa+\lambda=\beta} \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{\kappa\lambda=\alpha\gamma}$$

(*Στην παραπάνω ανάλυση είναι* $\kappa=\alpha\mu$ *και* $\lambda=\alpha\nu$).

Μπορείτε να δείτε και το σχετικό εφαρμογίδιο GeoGebra:

https://tube.geogebra.org/m/2361205

που δημιούργησα για αυτό το σκοπό.

Στον παρακάτω πίνακα εμφανίζονται δύο παραδείγματα παραγοντοποίησης τριωνύμων με διάσπαση του πρωτοβάθμιου όρου σύμφωνα με τον γενικό κανόνα.

$\begin{aligned}3x^2+11x+10&=3x^2+6x+5x+10\\ &=3x(x+2)+5(x+2)\\ &=(3x+5)(x+2)\\ &=3\left(x+\frac{5}{3}\right)(x+2)\end{aligned}$ [6 + 5 = 11 και 6·5 = 30 = 3·10]	$\begin{aligned}3x^2-11x+6&=3x^2-9x-2x+6\\ &=3x(x-3)-2(x-3)\\ &=(3x-2)(x-3)\\ &=3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-3)\end{aligned}$ [(-9) + (-2) = -11 και (-9)·(-2) = 18 = 3·6]

πίνακας 4

__**Σημείωση**__: Θεωρώ ότι δεν πρέπει να δίνονται στην Γ΄ Γυμνασίου για παραγοντοποίηση τριώνυμα όπως αυτά που εμφανίζονται στον πίνακα 4 και να ζητάμε να γίνεται διάσπαση του όρου βx σύμφωνα με τον γενικό κανόνα, διότι αυτή τη θεωρητική γνώση δεν τη γνωρίζουν οι μαθητές και ούτε υπάρχει λόγος να την αναφέρουμε και να εμπλέξουμε τους μαθητές σε τέτοιες διαδικασίες. Άλλωστε η εγκύκλιος το αναφέρει ρητά: «*Κατά την κρίση του διδάσκοντος, θα μπορούσαν να δοθούν κάποια* __*απλά τριώνυμα*__ *για παραγοντοποίηση με διάσπαση του πρωτοβάθμιου όρου και κοινό παράγοντα*». Ανέφερα τον γενικό κανόνα διάσπασης του βx για να τον γνωρίζουμε αφενός, αλλά και για να δούμε ότι οι διασπάσεις που προηγήθηκαν υπακούουν σ’ αυτόν τον γενικό κανόνα.

Σύμφωνα με τον γενικό κανόνα διάσπασης του βx ως «*απλά τριώνυμα*» μπορούμε να θεωρούμε αυτά για τα οποία ισχύει $\alpha + \gamma = \beta$ ή $(-\alpha) + (-\gamma) = \beta$, δηλαδή σαν αυτά που εμφανίζονται στους πίνακες 1, 2 και 3 στα οποία γίνεται άμεσα αντιληπτό πώς θα γίνει η διάσπαση.

Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με παραγοντοποίηση

Για επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων δευτέρου βαθμού με παραγοντοποίηση, μπορούμε να δίνουμε εξισώσεις με «*απλά τριώνυμα*» ζητώντας από τους μαθητές να τις λύνουν παραγοντοποιώντας το αντίστοιχο τριώνυμο με διάσπαση του όρου βx (ή του γ) και εφαρμόζοντας τον κανόνα ότι για να είναι ένα γινόμενο ίσο με μηδέν θα πρέπει κάποιος παράγοντάς του να είναι ίσος με μηδέν.
Εννοείται ότι θα πρέπει να έχουν εξοικειωθεί οι μαθητές με την παραγοντοποίηση ενός «*απλού τριωνύμου*» με την διαδικασία της διάσπασης.

Χαρακτηριστικά είναι τα παραδείγματα που εμφανίζονται στον πίνακα που ακολουθεί (στην δεύτερη εξίσωση προτιμήθηκε η διάσπαση του γ, ως ευκολότερη για τους μαθητές).

$3x^2-8x+5=0$ $3x^2-3x-5x+5=0$ $3x(x-1)-5(x-1)=0$ $(3x-5)(x-1)=0$ $3\left(x-\frac{5}{3}\right)(x-1)=0$ $x-\frac{5}{3}=0 \quad ή \quad x-1=0$ $x=\frac{5}{3} \quad ή \quad x=1$	$2x^2-5x-7=0$ $2x^2-5x-2-5=0$ $2(x-1)(x+1)-5(x+1)=0$ $(2x-7)(x+1)=0$ $2\left(x-\frac{7}{2}\right)(x+1)=0$ $x-\frac{7}{2}=0 \quad ή \quad x+1=0$ $x=\frac{7}{2} \quad ή \quad x=-1$

πίνακας 5

Αυτό θα πρέπει να γίνεται για να συνειδητοποιήσουν οι μαθητές τον ρόλο των ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ $(\alpha \neq 0)$ στην παραγοντοποίηση του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και έτσι να δεχθούν πιο εύκολα ή και να συμπεράνουν οι ίδιοι τον γενικό τύπο παραγοντοποίησης ενός τριωνύμου με την βοήθεια των ριζών του (αν υπάρχουν), δηλαδή τον τύπο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$, τον οποίο μπορούν να εφαρμόζουν για την παραγοντοποίηση οποιουδήποτε τριωνύμου υπολογίζοντας τις ρίζες ρ_1 και ρ_2 (αν υπάρχουν), με την βοήθεια του γνωστού τύπου.

Ανάλογο είναι και το πνεύμα της εφαρμογής 3 της σελίδας 95 του σχολικού βιβλίου καθώς και του παρακάτω χωρίου της εγκυκλίου:

§2.2Β (Να διατεθούν 3 ώρες)

«*α) Να μη διδαχθεί η απόδειξη του τύπου λύσεων. <u>Αντί για την απόδειξη μπορούν να δοθούν παραδείγματα δευτεροβάθμιων εξισώσεων που θα λυθούν με παραγοντοποίηση για να φανεί η ταύτιση των λύσεων που θα προκύψουν, με εκείνες (τις λύσεις) του τύπου λύσεων.</u>*

β) Να μη συζητηθεί η διερεύνηση παραμετρικών εξισώσεων 2^{ου} βαθμού (ασκήσεις 7 και 8).

γ) <u>Η παραγοντοποίηση τριωνύμου μπορεί να βασιστεί στην εφαρμογή 3 της σελ. 95</u>».

Αρχικά καλό είναι να δίνονται εξισώσεις με θετικές ρίζες και κατόπιν και με αρνητικές.

Επίλογος

Κλείνοντας, αναφέρουμε ως ανακεφαλαίωση τα βήματα που πρέπει να ακολουθούμε στη Γ΄ Γυμνασίου για την διδασκαλία της παραγοντοποίησης του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ($\alpha \neq 0$), που είναι:

1. Αρχικά παραγοντοποιούμε με την διαδικασία της διάσπασης και της ομαδοποίησης απλές περιπτώσεις τριωνύμων, όπως είναι αυτά που εμφανίζονται στους πίνακες 1, 2 και 3.
2. Στη συνέχεια λύνουμε απλές εξισώσεις δευτέρου βαθμού παραγοντοποιώντας τα τριώνυμα όπως παραπάνω, ώστε να συνειδητοποιούν οι μαθητές τον ρόλο των ριζών ενός τριωνύμου στην παραγοντοποίησή του.
3. Τέλος, δίνουμε τον γενικό τύπο παραγοντοποίησης ενός τριωνύμου με τη βοήθεια των ριζών του (αν υπάρχουν) ευελπιστώντας μετά από την όλη διαδικασία ότι οι μαθητές θα τον εφαρμόζουν συνειδητά και όχι μηχανικά.